UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional San Nicolás

Ecuaciones Diferenciales y Complementos de Análisis

DERIVADAS e INTEGRALES

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

INTEGRACIÓN de FUNCIONES VECTORIALES

Sea la función vectorial:

$$\overline{f} : A \to \Re^3 \,/\, A \subseteq \Re \qquad \wedge [a,b] \subset A$$

$$t \in A \to \overline{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

si $\overline{f}$ esta acotada en [a, b], se define:

$$\boxed{\int_a^b \overline{f}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\,\vec{i} + \int_a^b y(t)dt\,\vec{j} + \int_a^b z(t)dt\,\vec{k}}$$

siempre que existan las integrales del segundo miembro.

En este caso se dice que $\overline{f}$ <u>es integrable en [a, b].</u>

INTEGRACIÓN de FUNCIONES VECTORIALES

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE INTEGRABILIDAD

Si $\overline{f}$ es acotada y continua en [a, b] entonces $\overline{f}$ es integrable en [a, b].

PROPIEDADES:

- Si $\overline{f}(t)$ y $\overline{g}(t)$ son integrables en [a, b] entonces $\alpha\overline{f}+\beta\overline{g}$ es integrable en [a, b] con $\alpha,\beta\in\Re$ y vale:

$$\int_a^b\left[\alpha\overline{f}`(t)+\beta\overline{g(t)}\right]dt=\alpha\int_a^b\overline{f}(t)dt+\beta\int_a^b\overline{g}(t)dt$$

- Si [a, b]=[a, c] U [c, b] entonces: $\int_a^b\overline{f}(t)\,dt=\int_a^c\overline{f}(t)dt+\int_c^b\overline{f}(t)dt$

FUNCIONES VECTORIALES

Situación problemática:

Una partícula se mueve según la trayectoria dada por la función vectorial: $\bar{r}(t) = sen(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + t\,\vec{k}$ donde t es el tiempo.

a) Hallar su velocidad y aceleración en función del tiempo.

b) Calcular el módulo de la velocidad y la aceleración en el instante t=0.

c) Graficar la forma que adopta la trayectoria seguida por la partícula.

d) Calcular la longitud de dicha trayectoria si la partícula se mueve desde t=0 a t=3π

INTEGRAL MÚLTIPLE de f sobre T

Se denomina integral múltiple de f sobre T, al número si existe, siguiente:

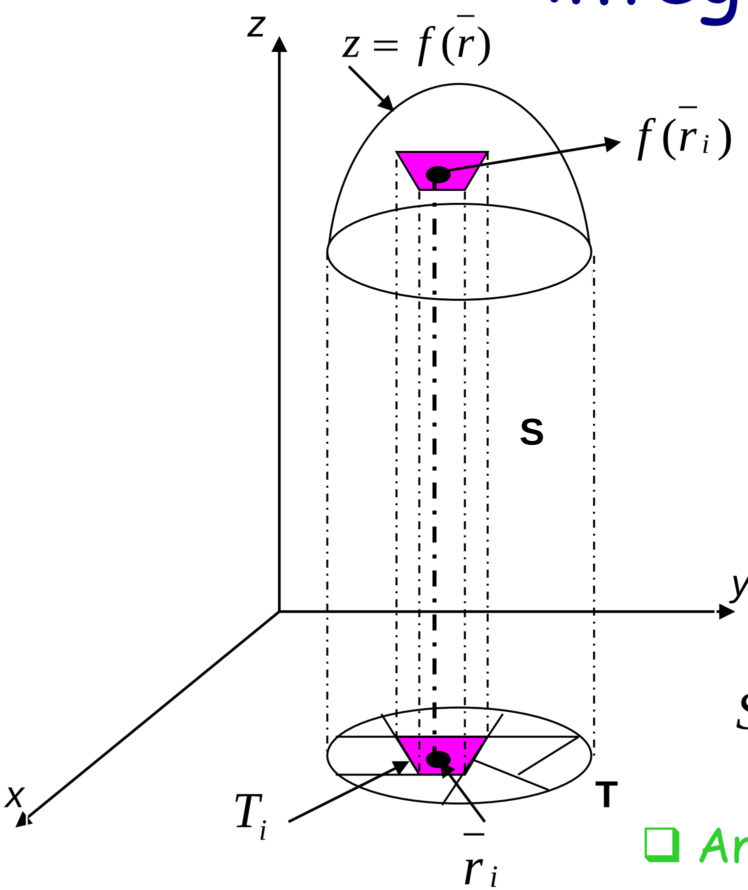
$$I = \int_T f\, d\mu = \lim_{\|P\|\to 0} s(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\overline{r_i}).\mu(T_i)$$

- Si $T \subset \Re^2$: $\boxed{\int_T f\, d\mu = \iint_T f(x,y)\, dx\, dy}$ Integral doble
- Si $T \subset \Re^3$: $\boxed{\int_T f\, d\mu = \iiint_T f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$ Integral triple

Condición suficiente de integrabilidad

Sea f un campo escalar definido, acotado y continuo en T medible. Entonces f es integrable sobre T.

Interpretación geométrica de la integral doble



Sea $f(\bar{r}) \geq 0 \;\; \forall \bar{r} \in T \subset \Re^2$

integrable en T.

$$\underbrace{\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i)\,\mu(T) = \iint_T f(\bar{r})\,d\mu}$$

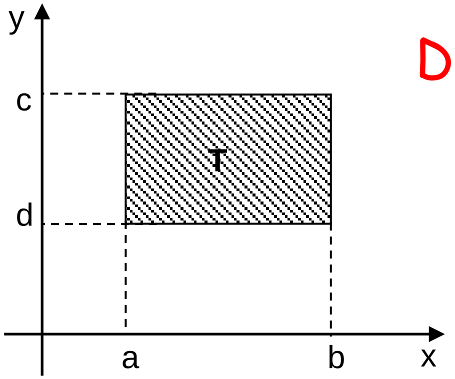
Volumen del cuerpo de base T y altura f(r).

$$S = \left\{(x,y,z) \in \Re^3 \,/\, (x,y) \in T \wedge 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}$$

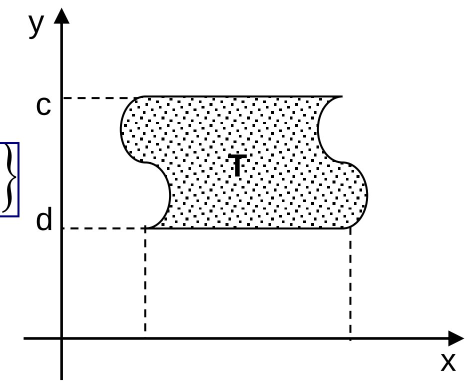
- Analizar casos particulares $\begin{cases} f(\bar{r}) \geq g(\bar{r}) \geq 0 \\ g(\bar{r}) \leq f(\bar{r}) < 0 \end{cases}$

Cálculo de integrales dobles

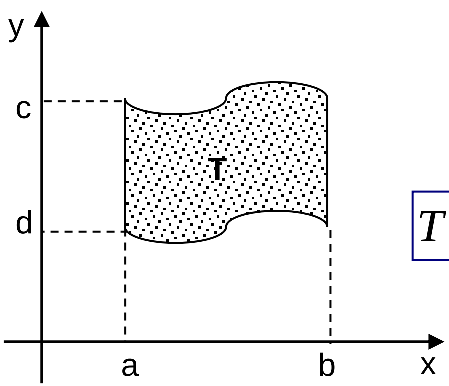
De acuerdo al recinto de integración



$$T = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, a \le x \le b \;\wedge\; c \le y \le d\}$$

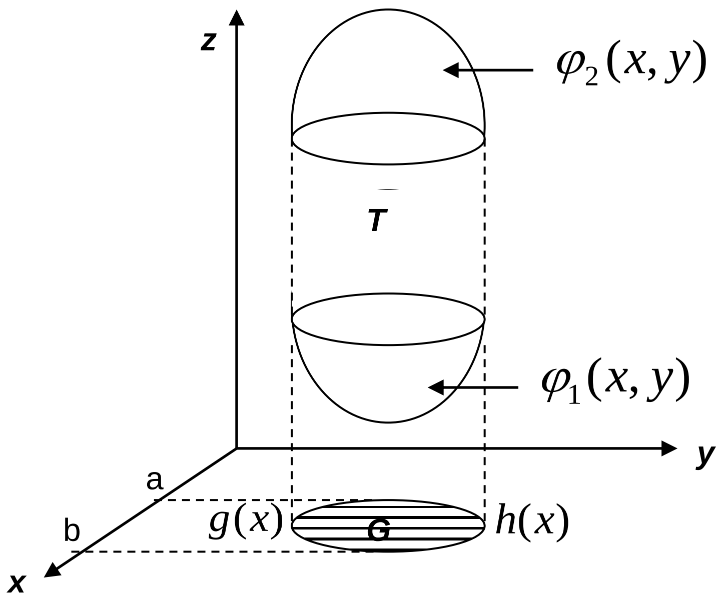


$$T = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, a \le x \le b \;\wedge\; g(x) \le y \le h(x) \;\; con \;\; g, h \; cont \; en \; [a, b]\}$$



$$T = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, g(y) \le x \le h(y) \wedge c \le y \le d \;\; con \;\; g, h \; cont \; en \; [c, d]\}$$

Cálculo de integrales triples



$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right] dx$$

Dominio de Integración

$$T = \{(x,y,z) \in \Re^3 \,/\, \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y) \; con \; (x,y) \in G \wedge \varphi_1, \varphi_2 \; cont \; en \; G\}$$

Cálculo de integrales múltiples

Muchas veces es necesario efectuar UN CAMBIO DE VARIABLES

COORDENADAS RECTANGULARES

Integrales dobles

COORDENADAS POLARES

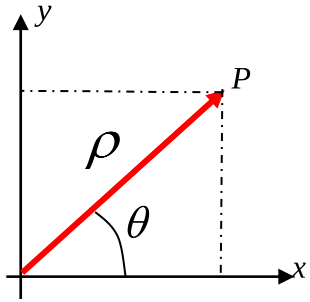
Integrales triples

COORDENADAS CILÍNDRICAS

COORDENADAS ESFÉRICAS

Cambio de variables

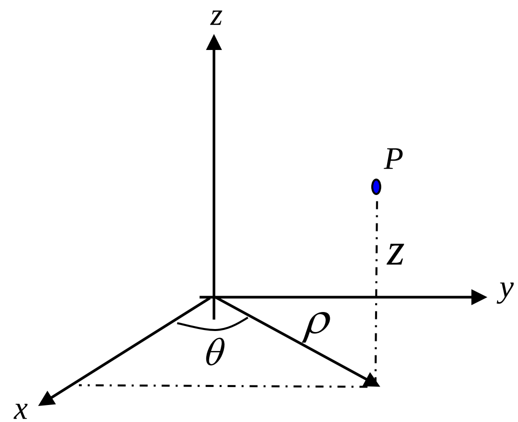
COORDENADAS POLARES



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho\, \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\left| J(\rho,\theta) \right| = \rho$$

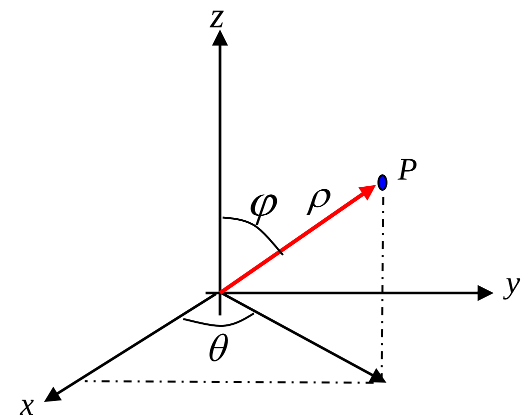
COORDENADAS CILÍNDRICAS



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho\, \mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\left| J(\rho,\theta,z) \right| = \rho$$

COORDENADAS ESFÉRICAS



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta\, \mathrm{sen}\,\varphi \\ y = \rho\, \mathrm{sen}\,\theta\, \mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \cos\varphi \end{cases}$$

$$\left| J(\rho,\theta,\varphi) \right| = \rho^2\, \mathrm{sen}\,\varphi$$

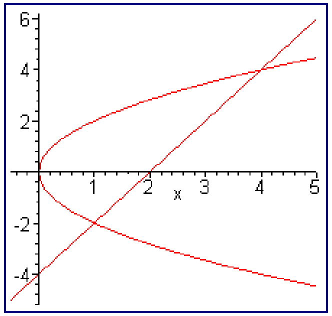
Aplicaciones físicas y geométricas de las integrales

- Cálculo de áreas
- Cálculo de volúmenes
- Carga eléctrica total
- Masa y centro de masa
- Centro geométrico

Lámina plana

Recinto en el espacio

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Facultad Regional San Nicolás



Área de una lámina plana

Hallar el área encerrada entre las curvas siguientes: $y^2 = 4x$ y $2x - y = 4$

Masa y Centro de masa de una lámina plana de material no homogéneo

En MAPLE

Hallar la masa y el centro de masa de una lámina triangular de vértices (0; 0), (0; 1) y (1,0)
supuesta la densidad en (x; y) dada por la función δ(x; y)=x*y

¿Y si la lámina fuera de material homogéneo?

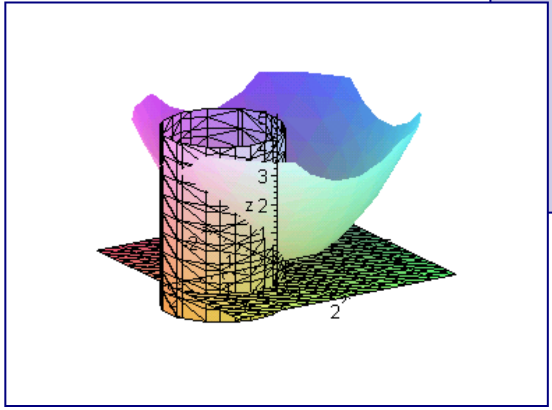
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Facultad Regional San Nicolás

Volumen de un sólido

Mediante integrales múltiples hallar el volumen comprendido entre los planos $z = 0$; $z = x + y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ con la restricción $x \leq 0$, $y \leq 0$.

Centro geométrico

Determinar las coordenadas del centro geométrico del volumen interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, exterior al paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre el plano $z = 0$



En MAPLE

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Facultad Regional San Nicolás

INTEGRALES CURVILÍNEAS

Sea C una curva regular de parametrización $\overline{r}(t)$

$\overline{F}$ un campo vectorial definido, acotado y continuo sobre C

Se llama INTEGRAL CURVILÍNEA de $\overline{F}$ sobre C:

$$\boxed{\int_C \overline{F}.d\overline{r} = \lim_{\left\|\Delta \overline{r}_i\right\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(\overline{r}_i).\Delta\overline{r}_i}$$

Su fórmula de cálculo es:

$$\boxed{\int_C \overline{F}.d\overline{r} = \int_a^b \overline{F}[\overline{r}(t)].\overline{r}'(t)\,dt}$$

Cumple con las propiedades de:

LINEALIDAD, ADITIVIDAD RESPECTO AL DOMINIO DE INTEGRACIÓN y SENTIDO DE CIRCULACIÓN

PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS

TRAMOS RECTOS:

- Escribir la parametrización del segmento recto que une los puntos A y B en uno y otro sentido:

A=(1, 1) y B=(4, 5)

TRAMOS CURVOS:

- Escribir la parametrización del arco de parábola $y = x^2$ que une P_1=(-1, 1) al P_2=(1, 1).
- Escribir la parametrización del arco de cincunferencia de radio 1 y centro C=(0, 1) que une los puntos (0, 0) y (1, 1).

INTEGRALES CURVILÍNEAS respecto a la longitud de arco

Sea C un arco de curva regular de parametrización $\bar{r}(t)$

$s(t) = \int_0^t \left| \bar{r}'(t) \right| dt$ la función longitud de arco

$\varphi(\bar{r})$ un campo escalar definido, acotado y continuo sobre C

Se llama INTEGRAL CURVILÍNEA de $\varphi(\bar{r})$ sobre C:

$$\boxed{\int_C \varphi(\bar{r}).ds = \int_a^b \varphi[\bar{r}(t)].s'(t)\,dt}$$

Aplicaciones Físicas

Trabajo de una fuerza sobre una superficie

Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas:

$$\overline{F}(x,y,z) = \vec{i} + x\,\vec{j}$$

desde el punto (0,0,0) hasta (0,1,0) a lo largo de la curva C:

$$\overline{r}(t) = sen(t)\,\vec{i} + \frac{1}{\pi}\,\vec{j} \qquad 0 \le t \le \pi$$

Masa de un resorte

Calcular la masa de un alambre homogéneo en forma de hélice circular de parametrización C:

$$\overline{r}(t) = 2\cos(t)\,\vec{i} + 2\,sen(t)\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

En MAPLE

INTEGRALES CURVILÍNEAS independientes de la trayectoria

Sea: $\varphi(\bar{r})$ un campo escalar diferenciable en T conexo y abierto

con $\nabla\varphi(\bar{r})$ continuo en T.

C una curva regular de parametrización $\bar{r}(t)$ con $t \in [a,b]$

Entonces:

$$\boxed{\int_C \nabla\varphi(\bar{r})\, d\bar{r} = \varphi(\bar{r}(b)) - \varphi(\bar{r}(a))}$$

Este teorema afirma que una integral curvilínea de un gradiente continuo de un campo escalar diferenciable <u>es independiente de la trayectoria y sólo depende del punto inicial y final.</u>

FUNCIÓN POTENCIAL

Un campo vectorial $\overline{F}$ acepta función potencial si existe un campo escalar $\varphi \,/\, \nabla\varphi = \overline{F}$

φ se llama FUNCIÓN POTENCIAL de

- Se cumple: $\boxed{\overline{F} = \nabla\varphi \Rightarrow (P,Q,R) = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)}$
- Los puntos del plano en el cual la función potencial toma el mismo valor forman una <u>curva equipotencial</u>

  (Isobaras si φ es la presión; isotermas para la temperatura)
- En el espacio forman una <u>superficie equipotencial.</u>

FUNCIÓN POTENCIAL

Sea $\overline{F}$ campo vectorial diferenciable con continuidad en un conjunto T conexo y abierto entonces:

- $\overline{F}$ es un gradiente por lo tanto acepta <u>función potencial.</u>
- $\int_C \overline{F} \,.\, d\overline{r}$ siendo C regular, sólo depende de la posición inicial y final (independencia de la trayectoria)
- $\int_C \overline{F} \,.\, d\overline{r} = 0$ si C es regular y cerrada.

FUNCIÓN POTENCIAL

Para la existencia de FUNCIÓN POTENCIAL es preciso:

✓ Condición necesaria:

Si $\overline{F}$ es un campo vectorial diferenciable con continuidad que acepta función potencial entonces

$$\boxed{rot\,\overline{F} = \overline{0}}$$

✓ Condición necesaria y suficiente:

Si $\overline{F}$ es un campo vectorial diferenciable definido en un conjunto T simplemente conexo y $rot\,\overline{F} = \overline{0}$ entonces $\overline{F}$ acepta función potencial en T.

Determinación de funciones potenciales

Dado el campo vectorial $\overline{F}(x,y)=(x^2+y^2)\vec{i}+2xy\,\vec{j}$:

a) Encontrar el dominio del campo vectorial,

b) Analizar si acepta función potencial indicando el dominio de validez.

c) Calcular la función potencial en caso que exista.

En MAPLE

Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación diferencial $\boxed{P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0}$ se llama exacta cuando existe función potencial de un campo (P, Q).

En tal caso, la solución general de dicha ecuación es $\boxed{\varphi(x,y)=C}$ con C constante.

TEOREMA DE GREEN

Sea C es una curva de Jordán orientada positivamente que limita a un conjunto simplemente conexo D y $\overline{F}$ un campo vectorial diferenciable en DUC, entonces:

$$\oint_C \overline{F}\,.\,d\overline{r} = \oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Cálculo de áreas a través de integrales curvilíneas

$$A(D) = \oint_C x\,dy$$

$$A(D) = \oint_C -y\,dx$$

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$$

Definiciones previas

Superficie paramétrica: $\boxed{S = \overline{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}}$

Producto vectorial fundamental: $\boxed{\overline{r_u} \wedge \overline{r_v}}$ ⇨ *Vector normal a la superficie*

Área de una superficie: $$A(S) = \iint_T \left| \overline{r_u} \wedge \overline{r_V} \right| . du\, dv$$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

$$\iint_S f\, ds = \iint_T f\, [\overline{r}(u,v)] \,.\, \left| \overline{r_u} \wedge \overline{r_v} \right| du\, dv$$

Aplicaciones

En MAPLE

Ejercicio 1

Una partícula sujeta a una fuerza $\oint_C (xy + y^2)dx + x^2 dy$ se mueve en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor de la curva cerrada formada por:

$$y = x, \quad y = x^2,$$

Usar el Teorema de Green para encontrar el trabajo realizado.

Ejercicio 2

Hallar el área de la elipse.

Ejercicio 3

Hallar el área de la superficie lateral del cono $x^2 + y^2 = z^2$ situada por encima del plano *xy* e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Aplicaciones Físicas

Masa de una superficie

$$M(S) = \iint_S \delta \, ds$$

Momento de Inercia

$$I = \iint_S d^2 \, \delta \, ds$$

Centro de masa

$$\overline{r}_{CM} = \iint_S \overline{r} \, \delta \, ds$$

Flujo de un fluido a través de una superficie

$$\phi_{\overline{F}} = \iint_T \overline{F} \, . \, (\overline{r}_u \wedge \overline{r}_v) \, du \, dv$$

En MAPLE